Prop Soit K un corps infini.
Les idéaux premiers de $K[X,Y]$ sont de la forme :
(i) $\{0\}$,
(ii) (P) où $P \in K[X,Y]$ est irréductible
(iii) (P,Q) où $P \in K[X]$ est irréductible et $Q \in K[X,Y]$ est irréductible dans $\left(K[X]/(P)\right)[Y]$.

De plus, les idéaux premiers maximaux sont ceux du type (iii).

---

1) **Un idéal principal n'est pas maximal.**

Soit $P \in K[X,Y]$. Si P est constant, c'est clair. Sinon, SPG,

$$P = P_n(X)Y^n + \dots + P_0(X), \quad P_n(X) \neq 0. \quad n \geq 1$$

Soit $x \in K$ non-racine de $P_n(X)$, car K est infini, et posons $\boxed{I = \langle P, X-x \rangle}$

Alors, $(P) \subsetneq I$, car sinon $X - x \in (P)$, exclu par degré.
De plus $I \neq K[X,Y]$, autrement

$$1 = PU + (X-x)V \quad \text{d'où en } (x,Y)$$

$$1 = \underbrace{P(x,Y)}_{\neq 0 \text{ car } x \notin Z(P_n)} U(x,Y)$$

d'où $P(x,Y)$ constant, exclu car $n \geq 1$.

---

2) **Interlude : pseudo-division euclidienne**

Si $F, P \in K[X,Y]$ sont non nuls, on a :

$$a(X)F(X,Y) = P(X,Y)Q(X,Y) + R(X,Y)$$

où $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$.

---

3) **Idéaux premiers principaux**

Comme $K[X,Y]$ est factoriel, premier $\Leftrightarrow$ irréductible.
Ce sont donc les (P) avec $P \in K[X,Y]$ irréductible, sans oublier l'idéal nul, car $K[X,Y]$ est intègre.

---

4) **Idéaux premiers non principaux**

Soit $\mathfrak{m}$ un tel idéal.
A) $\mathfrak{m} \ni P(X), Q(Y)$ irréductibles.
B) $\mathfrak{m}$ est maximal
C) Conclure.

A) Soit P de degré minimal en X parmi les polynômes de degré minimal en Y dans $\mathfrak{m} \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Alors : P est irréductible.

Preuve Supposons $P = AB$, A, B non constants. SPG, $A \in \mathfrak{m}$, car $\mathfrak{m}$ est premier !
Alors
$$\begin{cases} \deg_Y(A) \leq \deg_Y(P) & (1) \\ \deg_X(A) \leq \deg_X(P) & (2) \end{cases}$$
donc (1) est une égalité par (1) et une égalité. Ainsi, $\deg_Y(B) = \deg_X(B) = 0$, exclu. $\square$

D'autre part, $P = P(X)$.
En effet, $\mathfrak{m} \neq (P)$ car $\mathfrak{m}$ est non principal ; soit $F \in \mathfrak{m} - (P)$.
Alors $a(X)F = PQ + R$ où $\deg_Y R < \deg_Y P$.
Mais $R = a(X)F - PQ \in \mathfrak{m}$, d'où $R = 0$ par minimalité de P.

Ainsi, $\underbrace{P}_{\text{irréductible}} \mid a(X)F$ donc par lemme d'Euclide,
$P \mid a(X)$ d'où le résultat.
On obtient $Q = Q(Y)$ irr. symétriquement.

B) La projection $K[X] \to K[X]/(P)$ s'étend en :

$$\pi : K[X,Y] \longrightarrow K[X]/(P)\,[Y]$$

Notons
$$\begin{cases} \bar{Q} = \pi(Q) \\ \bar{\mathfrak{m}} = \pi(\mathfrak{m}), \text{ idéal car } \pi \text{ est surjective} \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\underbrace{K[X,Y]/\mathfrak{m}}_{G} \simeq \underbrace{\left(\underbrace{K[X]/(P)}_{\text{corps}}\right)[Y]}_{D \,=\, \text{anneau principal}} \Big/ \bar{\mathfrak{m}}.$$

Or $\mathfrak{m}$ est premier donc G est intègre donc D est intègre donc $\bar{\mathfrak{m}}$ est premier, $\boxed{\text{Maximal}}$ car $\bar{\mathfrak{m}} \ni \bar{Q} \neq 0$, car PID.
Par propriété, $\bar{\mathfrak{m}}$ est maximal donc D est un corps donc G est un corps donc $\mathfrak{m}$ est maximal.

C) Prenons un relevé de $\bar{R}$ générateur de $\bar{\mathfrak{m}}$ principal, $\bar{R}$ est donc irréductible dans $K[X]/(P)\,[Y]$.

On a bien $\mathfrak{m} = \langle P, R \rangle$.

En effet si $S \in \mathfrak{m}$, dans $K[X]/(P)$,
$\bar{S} = \bar{S_0}\bar{R}$ d'où

$$S = S_0R + TP$$

$\square$

Prop Soit K un corps infini.
Les idéaux premiers de $K[X,Y]$ sont de la forme :

(i) $\{0\}$;

(ii) (P) où $P \in K[X,Y]$ irréductible

(iii) (P,Q) où $P \in K[X]$ est irréductible et $Q \in K[X,Y]$ est irréductible dans $\left(K[X]/(P)\right)[Y]$.

De plus, les idéaux premiers maximaux sont ceux du type (iii).

---

1 Un idéal principal n'est pas maximal.

Soit $P \in K[X,Y]$. Si P est constant, c'est clair. Sinon, SPG,

$$P = P_n(X)Y^n + \dots + P_0(X), \quad P_n(X) \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Soit $x \in K$ non-racine de $P_n(X)$, car K est infini, et posons $\boxed{I = \langle P, X-x \rangle}$.

Alors, $(P) \subsetneq I$, car sinon $X - x \in (P)$, exclu par degré.

De plus $I \neq K[X,Y]$, autrement :

$$1 = PU + (X-x)V \quad \text{d'où en } (x,Y)$$

$$1 = \underbrace{P(x,Y)}_{\neq 0 \text{ car } x \notin Z(P_n)} U(x,Y)$$

d'où $P(x,Y)$ constant, exclu car $n \geq 1$.

---

2 Interlude : pseudo-division euclidienne

Si $F, P \in K[X,Y]$ sont non nuls, on a :

$$a(X)F(X,Y) = P(X,Y)Q(X,Y) + R(X,Y)$$

où $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$.

3 Idéaux premiers principaux.

Comme $K[X,Y]$ est factoriel, premier $\Leftrightarrow$ irréductible.
Ce sont donc les (P) avec $P \in K[X,Y]$ irréductible, sans oublier l'idéal nul, car $K[X,Y]$ est intègre.

---

4 Idéaux premiers non principaux

Soit m un tel idéal.

(A) $m \ni P(X), Q(Y)$ irréductibles.

(B) m est maximal

(C) Conclure.

(A) Soit P de degré minimal en X parmi les polynômes de degré minimal en Y dans $m \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Alors ...

Prem...

SP(...

Alors ...

donc ...

une ...

exclu ...

D'autre ...

En effet, ...

soit $F \in$ ...

Alors $a($ ...

Donc R ...

d'où $R =$ ...

...minimum

...onel,

...uctible.

... avec $P \in K[X,Y]$

...e. l'idéal $\mathfrak{m}$, car

...$,Y]$ est intègre.

...non principaux

...$)$ irréductibles

...nal

...gré minimal en X

...quations

...gré minimal en Y

...$\neq \emptyset$.

Alors : P est irréductible.

Preuve. Supposons $P = AB$, A, B non constants. SPG, $A \in \mathfrak{m}$, car $\mathfrak{m}$ est premier !

Alors $\begin{cases} \deg_Y(A) \leq \deg_Y(P) & (1) \\ \deg_X(A) \leq \deg_X(P) & (2) \end{cases}$

donc (2) est une égalité pour (1) et une égalité. Alors, $\deg_Y(B) = \deg_X(B) = 0$, absurde. □

D'autre part, $P = P(X)$.

En effet, $\mathfrak{m} \neq (P)$ car $\mathfrak{m}$ est non principal ; soit $F \in \mathfrak{m} - (P)$.

Alors $a(X)F = PQ + R$ où $\deg_Y R < \deg_Y P$.

Mais $R = a(X)F - PQ \in \mathfrak{m}$, d'où $R = 0$ par minimalité de P.

Ainsi, $P \mid a(X)F$ donc par lemme d'Euclide (P irréductible),

$P \mid a(X)$ d'où le résultat.

On obtient $Q = Q(Y)$ similairement.

(B) La projection $K[X] \to K[X]/(P)$ s'étend en :

$$\pi : K[X,Y] \longrightarrow K[X]/(P)\,[Y]$$

Notons $\begin{cases} \bar{Q} = \pi(Q) \\ \bar{\mathfrak{m}} = \pi(\mathfrak{m}), \text{ idéal car } \pi \text{ est surjective} \end{cases}$

Remarquons que :

$$G := K[X,Y]/\mathfrak{m} \simeq \underbrace{\underbrace{\left(K[X]/(P)\right)}_{\text{corps}}[Y]}_{\text{anneau principal}}/\bar{\mathfrak{m}} =: D$$

Or $\mathfrak{m}$ est premier donc G est intègre donc D est intègre donc $\bar{\mathfrak{m}}$ est premier, $\boxed{\text{maximal}}$ car $\bar{\mathfrak{m}} \ni \bar{Q} \neq 0$, car $P \nmid Q$.

Par principalité, $\bar{\mathfrak{m}}$ est maximal donc D est un corps donc G est un corps donc $\mathfrak{m}$ est maximal.

(C) Prenons un relevé de $\bar{R}$ générateur de $\bar{\mathfrak{m}}$ principal, $\bar{R}$ est donc irréductible dans $K[X]/(P)\,[Y]$.

On a bien $\mathfrak{m} = \langle P, R \rangle$.

En effet si $S \in \mathfrak{m}$, dans $K[X]/(P)$,

$\bar{S} = \bar{S_0}\,\bar{R}$ d'où

$S = S_0 R + TP$ □